

Gruppenübung 3

Aufgabe 1 Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1 x_2\end{aligned}\quad (1)$$

mit Hilfe der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

Aufgabe 2 Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ und dem Satz von Tschetajew, dass die Ruhelage $(0,0)$ der folgenden Systeme instabil ist. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

a)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_1^2 x_2\end{aligned}\quad (2)$$

b)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^3 - 3x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2^3 - x_1^2 x_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Aufgabe 3 Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunovfunktion $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ und des LaSalle'schen Invarianzprinzips, dass die Ruhelage $(0,0)$ des Systems

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2^2 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_1 x_2\end{aligned}\quad (4)$$

global asymptotisch stabil ist. Welche Aussage lässt sich mittels der Linearisierungsmethode treffen?

Aufgabe 4 Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 3x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 x_2 - x_2^3.\end{aligned}\quad (5)$$

a) Was kann man mit Hilfe der Linearisierungsmethode von Lyapunov über die Stabilität der Ruhelage $(0,0)$ aussagen?

b) Zeigen Sie, dass $V_1(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ eine Lyapunovfunktion für die Ruhelage $(0,0)$ von (5) ist.

c) Zeigen Sie mit Hilfe des LaSalle'schen Invarianzprinzips und der Lyapunovfunktion V_1 , dass die Ruhelage $(0,0)$ des gegebenen Systems global asymptotisch stabil ist.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Lyapunovfunktion $V_2(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + 3x_2^2)$ dass die Ruhelage $(0,0)$ des gegebenen Systems global asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 5 Betrachten Sie das nichtlineare System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + (x_1^2 - 1)x_2\end{aligned}$$

und die quadratische Lyapunovfunktion

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Zeigen Sie, dass die Menge $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$ zum Einzugsbereich des Ursprungs $x = [0 \ 0]^T$ gehört. Ist E der maximale Einzugsbereich?